С П Р А В К А З А П Р И Н О С И Т Е И Ц И Т И Р А Н И Я Т А

на представените от
доц. д.н. Йорданка Панева-Коновска
научни трудове за участие в конкурс за професор, обявен в Държавен вестник № 52 от 02. 07. 2019 г. (стр. 58),
в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление: 4.5. Математика, научна специалност: "Математически анализ (Специални функции)"

София, 2019

1. Описание на проблематиката

Всеки учен и инженер, който се занимава с практическо приложение на диференциалните уравнения, е наясно с важността на специалните функции. Разнообразието от задачи, които водят до специални функции, е предизвикало както бързо нарастване на броя на функциите, използвани в приложенията, така и бурно развитие на теорията за тях.

Така например функциите на Бесел дължат своя произход на конкретни задачи от механиката и астрономията. Те са се утвърдили като едни от най-често използваните специални функции в математическия анализ и приложенията му във физиката, механиката и инженерните дисциплини. Чрез тях се изразяват решенията на много задачи от посочените области. Беселовите функции са свързани с ортогоналните полиноми, тригонометричните и хипергеометричните функции. Поради своята значимост и широко приложение, те имат многобройни обобщения. Едно от тях (което по-точно казано е обобщение на функциите на Бесел–Клифорд), с добавен още един индекс (параметър), е направено от Сър Едуард Мейтланд Райт (в работата му: E.M. Wright, On the coefficients of power series having exponential singularities, J. London Math. Soc. 8 (1933), 71–79). Тези функции са наречени функции на Райт и са известни в литературата и като функции на Бесел-Мейтланд. По-нататъшни обобщения на функциите на Бесел от първи род са въведени от Патак (R.S. Pathak, Certain convergence theorems and asymptotic properties of a generalization of Lommel and Maitland transformations, Proc. Nat. Acad. Sci. India A-36, No 1 (1966), 81-86), и са с добавен още един параметър. Те са известни като обобщени функции на Бесел-Мейтланд (или Райт). С още два параметъра са така наречените обобщени функции на Ломел–Мейтланд (Райт). Предмет на изследване на част от представените трудове са функциите на Бесел и техни обобщения (с 2, 3 и 4 “дробни” индекса), известни с различни наименования като функции на Бесел-Мейтланд-Ломел-Фокс (кратко ще ги наричаме функции от *Беселов тип*). Чрез тези типични представители на специалните функции на дробното смятане (аналози на съответните цилиндрични функции) се изразяват решенията и функциите на Грийн за редица диференциални уравнения от дробен ред, свързани със задачи на математическата физика, теория на управлението, дифузионно-вълнови явления и др.

Друг вид функции са функциите на Митаг-Лефлер. Те са възникнали в началото на двадесети век при задачи, свързани с аналитично продължение, т. е. при задачи с чисто теоретична насоченост. Вероятно поради тази причина те са останали непознати и неизползвани почти половин столетие. Независимо от това днес те са едни от най-често използваните специални функции. През 1971 г. Прабхакар прави обобщение на функциите на Митаг-Лефлер (T. R. Prabhakar, A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, Yokohama Math. J., **19** (1971), 7–15.), въвеждайки обобщените (3-параметрични, наричани още функции на Прабхакар) функции на Митаг-Лефлер. В края на двадесети век Кирякова и Лучко въвеждат мултииндексни (с $2m$ индекса) обобщения на функциите на Митаг-Лефлер, обхващайки функциите на Митаг-Лефлер и всички по-горе изброени функции от типа на функциите на Бесел и техните обобщения, включително хипербеселовите функции.

Многобройни изследвания на тези функции, във връзка с интегрални трансформации, оператори за дробно смятане и като решения на математически модели на практически задачи, са публикувани от Б. Станкович, А. Килбас, Ф. Майнарди, Р. Горенфло, М. Сайго, Ю. Лучко, Х. Трухийо и др. (част от тях публикувани в специализираното международно списание "Fractional Calculus and Applied Analysis", vol. 2, No 4 (1999), vol. 5, No 4 (2002), vol. 8, No 2 (2005)). Техните дефиниции и свойства могат да бъдат намерени и в книгите на О.И. Маричев (O. I. Marichev, Method of Evaluation of Integrals of Special Functions (In Russian), Nauka i Technika, Minsk, 1978.), В. Кирякова (V. Kiryakova, Generalized Fractional Calculus and Applications, Longman & J. Wiley, Harlow & N. York, 1994.) и др. от наскоро излезлите нови книги, съдържащи така наречените специални функции на дробното смятане.

Съвременният етап в развитието на теорията на специалните функции е тясно свързан и със задачата за представяне на холоморфни функции чрез редове по специални функции от вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z), \tag{1.1.1}$$

където j_n са специални функции. На важни резултати в тази насока, получени през последните четири десетилетия на двадесети век, са посветени монографиите на П. Русев "Analytical Functions and Classical Orthogonal Polynomials", Sofia (1984) и "Classical Orthogonal Polynomials and their Associated Functions in Complex Domain", Marin Drinov Academic Publishing House, Bulgarian Academic Monographs 10 (2005).

2. Научни и научно-приложни приноси в представените научни трудове

За участие в конкурса са представени 26 научни публикации (Списък 7), от които една монография и 25 статии (от тях 3 бр. с IF и 10 бр. със SJR (сум. IF= 3,937 & SJR = 1,646). Ето и разпределението им по групи показатели за изпълнение на минималните изисквания. Към група показатели "В" са отнесени публикациите [3, 5], [8] – [13], [15] и [18] – [21]. Към група показатели "Г", точка 5 е отнесена публикацията [1], а към група показатели "Г", точка 7 – останалите 12 научни публикации.

Освен тях са представени 2 учебника и 2 учебни пособия (Списък 16.2), и за пълнота авторефератът на защитената дисертация за научната степен доктор на науките.

Като се следва приложения списьк от трудове, получените резултати могат да се систематизират както следва.

2.1. Неравенства, асимптотични формули и 3D-изображения

Към тази група спадат резултати, които се съдържат в публикациите [1] – [6] и [10]. Те се отнасят за различните видове функции от Беселов (с 1 – 4 индекса) и *Митаг-Лефлеров* (с 1 – 3 индекса) тип. Нека за удобство да означим елементите на тези фамилии от функции с $j_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Част от резултатите за $j_n(z)$ се отнасят за цялата комплексна равнина, а други за нейни компактни подмножества. Най-общо казано, за $j_n(z)$ се получават представяния от вида

$$j_n(z) = p(z; n)(1 + \vartheta_n(z)), \tag{2.1.1}$$

където $p(z; n)$ е моном на z с коефициент, евентуално зависещ от n. В публикацията [1] се съдържат асимптотични формули за функциите от Беселов тип от вида

$$j_n(z) = p(z; n)(1 + \vartheta_n(z)),\ \vartheta_n(z) \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{2.1.2}$$

където $\vartheta_n(z)$ е холоморфна функция на z в цялата комплексна равнина. Същевременно са направени оценки за модула на съответния остатъчен член ϑ_n както в цялата комплексна равнина, така и в нейни компактни подмножества. Тези резултати представляват естествено обобщение на добре известната аналогична формула за функции на Бесел от първи род.

Според стойностите на параметрите е възможно първите няколко члена на $j_n(z)$ да са нули. Подробно изследване за това за функциите от Беселов тип се съдържа в публикацията [6].

За някои от изследванията, където са необходими по-прецизни оценки, така получените асимптотични формули не са достатъчни. За целта е необходимо да прецезираме оценките за модула на съответния остатъчен член $\vartheta_n(z)$. За функциите от Беселов тип това е направено в публикациите [2], [3] и [6].

Аналогични резултати за класическите функции на Митаг-Лефлер (с 1 и 2 параметъра) са получени в [4] и [5], а за 3-параметричните функции $E^{\gamma}_{\alpha,\,n}(z)$ – в публикацията [10].

Да отбележим, че върху компактните подмножества на комплексната равнина сходимостта на съответния остатъчен член $\vartheta_n(z)$ е равномерна. Дадените асимптотични формули описват поведението на функциите за “големи” стойности на параметрите и играят съществена роля за понататъшните изследвания.

Накрая да споменем, че за илюстрация в [1] са предоставени различни примери за триизмерни графики на функции от Беселов тип. Това е реализирано с използване на системата за компютърната алгебра “Maple”.

2.2. Сходимост на редове

Както е известно, изследването на свойствата на комплексните функции, холоморфни в област от комплексната равнина, често се опира на възможността за представянето им чрез редове по конкретни изброими системи от функции, холоморфни в разглежданата област. За кръгови области най-често се привличат системите на Тейлър, което води до представянето чрез степенни редове. В други области се използват редове по класическите ортогонални полиноми и други специални функции. Редове по системата от функции на Бесел от първи род с цял неотрицателен индекс са разглеждани още през деветнадесетия век от Карл Нойман. На него се дължи представянето на ядрото на Коши чрез билинеен ред по тези функции и “полиномите” на Нойман. С помощта на последния ред е доказано, че тази система от Беселови функции е базис в пространството от комплексните функции, холоморфни в кръгова област. С въвеждането и изучаването на другите класове функции на дробното смятане започва представянето и използването на редове и по тях.

Класическият едномерен комплексен анализ изучава степенни редове, които са сходящи в кръгове в равнината. Затова естествено възникват въпросите за пресмятане на радиуса на сходимост, а също така и изучаването на поведението на реда по периферията на кръга, които са занимавали класиците на анализа Коши, Абел, Таубер, Адамар, Островски и т. н. още от XIX (последният в началото на 20-ти) век. Специално внимание е отделено на теоремите за свръхсходимост (Островски) и за празнините (Адамар). Резултати от този тип са получени за някои системи от ортогонални полиноми и цели функции и подробно разгледани в монографиите на Русев. В представените за конкурса публикации се разглеждат редове по различните видове функции от Беселов (с 1, 2, 3 и 4 индекса) и Митаг-Лефлеров тип (с 1, 2 и 3 индекса) и кратко ще ги наричаме *редове от Беселов тип*, съответно *редове от Митаг-Лефлеров тип*. С цел резултатите да се получат във възможно по-семпла форма, функциите от Беселов и Митаг-Лефлеров тип, по които са разглежданите редове, са леко модифицирани с умножаване с подходяща степен на променливата z и с подходящ коефициент.

- **Област на сходимост и поведение на редовете в кръга на сходимост**

  Изследвания от този тип, свързани с редове по различните видове функции от Беселов тип, са направени в публикациите [1, 14, 16], а за редове по функциите на Митаг-Лефлер в [5]. Резултатите за редове по 3-параметричните функции на Митаг-Лефлер се съдържат в [15, 19]. В посочените публикации са дадени твърдения от типа на класическата теорема на Коши–Адамар и лемата на Абел. Установено е, че всеки един от разглежданите редове е абсолютно сходящ в отворен кръг $D(0; R)$ с радиус R и разходящ в множеството $|z| > R$. Нещо повече, вътре в кръга на сходимост, т.е. за $|z| \leq r < R$ редовете са и равномерно сходящи. Показано е, че ако някой от разглежданите редове е сходящ в точката z_0, то той е абсолютно сходящ и в отворвния кръг $D(0; z_0)$. Разгледани са също и теореми от абелов тип за тези редове, т.е. доказва се, че ако един от разглежданите редове е сходящ в точка z_0 от границата на областта на сходимост, то съществува границата на неговата сума при $z \to z_0$, при условие, че z принадлежи на подходяща ъглова област с връх в точката z_0 и също, че той е абсолютно и равномерно сходящ в "триъгълна" област в "близост" до точката z_0.

- **Поведение на редовете по периферията на кръга на сходимост**

Към тази категория спадат резултати за поведението на изследвания ред по контура на областта му на сходимост.

Такива са например получените аналози на класическите теореми на Таубер и Литълуд, които са обратни на съответните теореми от абелов тип. В тях се установява, че ако съществува границата на сумата на разглеждания ред при $z \to z_0$ радиално, то редът е сходящ и в точката z_0, разбира се при допълнително условие за ръста на коефициентите a_n на реда. Условието за коефициентите е $na_n \to 0$ и даже $a_n = O(1/n)$. В първия случай резултатът е аналог на класическата теорема на Таубер, а във втория – на нейното обобщение, направено от Литълуд.

Резултатите, свързани с теоремите от Тауберов тип за редовете от Беселов тип, се съдържат в публикацията [1], а за редовете от Митаг-Лефлеров тип в [5], [7], [9] и [19]. Теоремите от Литълудов тип за редове от Беселов тип са изложени в публикациите [2, 3] и [7], а за редове от Митаг-Лефлеров тип – в [4, 5] и [19].

Други интересни резултати, които са получени, са аналогични на класическата теорема на Фату за степенни редове. Тя гласи, че ако коефициентите на един степенен ред с радиус на сходимост $R = 1$ клонят към нула и σ е дъга от единичната окръжност $C(0;1)$, всички точки на която (включително и краищата ѝ) са регулярни за сумата на реда, то разглежданият ред е сходящ, даже равномерно върху дъгата σ. На тази тема са посветени статиите [12, 14, 16] и [20]. В тях се разглеждат редове от Беселов и Митаг-Лефлеров тип с радиус на сходимост $R = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Доказва се, че ако σ е дъга от единичната окръжност $C(0;1)$, всички точки на която (включително и краищата ѝ) са регулярни за сумата на реда, то разглежданият ред е сходящ, даже равномерно върху дъгата σ. Статиите [14, 16] са свързани с теорема от типа на Фату за редове от Беселов тип, а съответните резултати за редове по функции от Митаг-Лефлеров тип се намират в [12] и [20].

- **Свръхсходимост**

  И така, точките по контура на кръга на сходимост на един степенен ред може да са регулярни или сингулярни за сумата на реда f, но редът е разходящ извън кръга на сходимост. Обаче, понякога е възможно да съществува подредица на редицата от парциални суми на реда, която е сходяща в околност на регулярна точка на сумата на реда f, т.е. извън кръга на сходимост. Такива редове се наричат свръхсходящи и са свързани с понятието “празнини”.

  В това направление основен е един резултат на Островски, според който, ако един степенен ред с радиус на сходимост $R = 1$ има сума f в отворения единичен кръг $D(0;1)$, f има поне една регулярна точка върху контура $C(0;1)$ и f има Адамарови празнини, то редът е свръхсходящ (Островски е доказал и обратното твърдение). От съществуването на празниини обаче не винаги следва свръхсходимост. Така например, степенният ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{k_n} z^{k_n}$ с $k_{n+1} \geq (1+\vartheta)k_n$ $(\vartheta > 0)$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_{k_n}|^{1/k_n} = 1$ има Адамарови празнини, но не е свръхсходящ. Неговата естествена граница на аналитичност е единичната окръжност $C(0;1)$, и това е просто теоремата на Адамар за празнините. Аналогични резултати, свързани с редове от Беселов тип са получени в статията [17], а за редове от Митаг-Лефреров тип – в [18] и [20].

  Друг интересен разултат в теорията на степенните редове се дава с обратната на теоремата на Островски. Добре известно е, че добавянето на степенен ред с радиус на сходимост > 1 към свръхсходящ степенен ред с радиус на сходимост 1, запазва свръхсходимостта. Според тази теорема, всеки свръхсходящ степенен ред може да се получи по този начин. Нещо повече, както при степенните редове, всеки свръхсходящ ред от Беселов тип може да се получи по този начин. Това се потвърждава от доказаната в [23] теорема, която е обратна на теоремата от типа на Островски (за свръхсходимост). Именно, този резултат гласи, че ако $F(z)$ е сума на даден ред по функции на Бесел-Мейтланд, с кръг на сходимост единичния кръг, и този ред е свръхсходящ, то $F(z)$ може да се представи във вида

  $$F(z) = H(z) + G(z),$$

  където редът $H(z)$ има Адамарови празнини, а редът $G(z)$ има радиус на сходимост, по-голям от единица. Полученият резултат е аналог на обратната теорема на Островски за свръхсходимост на степенни редове. В процеса на доказателството са намерени някои свойства на разглежданите свръхсходящи редове, такива като полезни неравенства за подредици на редиците от парциалните им суми и интеграли от тях, след което те са използвани за доказване на обратната теорема. Резултатите за редовете от Митаг-Лефлеров тип, както и за останалите редове от Беселов тип, се намират в други публикации, но те не са представени за конкурса.

Изложените в Секция 2.2. резултати за сходимост на редове от Беселов и Митаг-Лефлеров тип са отразени и дискутирани и в публикациите [8], [9], [11], [13], [15] и [21] и са представени на специализираните международни форуми, в чиито трудове са публикувани. Да отбележим, че в [11] се дискутират резултати от този тип и за редове по мултииндексни функции на Митаг-Лефлер с $2m$ параметъра. Онези от резултатите, които се отнасят до функциите от Митаг-Лефлеров тип са систематизирани и анализирани в обзорните статии [19] и [20]. Резултатите за функциите от Беселов тип в частта си до теорема от Тауберов тип включително са систематизирани и дискутирани в [1]. Изложените там доказателства използват само асимптотична формула от вида (2.1.2) без допълнително прецизиране за оценките на модула на съответния остатъчен член $\vartheta_n(z)$.

В заключение, може да се направи обобщението, че резултатите, получени за разглежданите редове от функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип са аналози за класическите степенни такива и тези редове имат поведение като широко използваните степенни редове.

2.3. Мултииндексни ($3m$-индексни) функции на Митаг-Лефлер

През 2011 г. в публикацията:

> J. Paneva-Konovska, Multi-index (3m-parametric) Mittag-Leffler functions and fractional calculus, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **64**, No 8 (2011), 1089–1098

са въведени $3m$-индексните (мултииндексни) функции на Митаг-Лефлер, които са обобщение както на мултииндексните (с $2m$ индекса), така и на

3-индексните функции $E_{\alpha,\,\beta}^{\gamma}$ на Митаг-Лефлер. В тази и още няколко публикации са установени важни основни свойства на тези функции. Въпросните публикации обаче не са представени за участие в конкурса, защото са използвани в процедурата за получаване на научната степен "д.н.".

Така например, според стойностите на разглежданите в дефиницията параметри е доказано, че или тези функции са цели функции, и в този случай е определен редът и типът им, или се редуцират до полиноми.

Тъй като повечето от специалните функции на математическата физика са частни случаи на обобщените хипергеометрични функции ${}_pF_q$ и ${}_p\Psi_q$, и по този начин на по-общите G-функция на Майер и H-функция на Фокс, по-нататък е определено мястото на въведените функции сред познатите специални функции, по-специално в класовете на обобщените хипергеометрични функции на Райт и H-функциите на Фокс. По-конкретно, мултииндексните функции на Митаг-Лефлер са изразени чрез обобщените хипергеометрични функции на Райт, а също така и чрез H-функциите на Фокс, като освен това са представени чрез интеграл от типа на контурния интеграл на Мелин–Барнс. Като следствие е намерено, че трансформацията на Мелин от $3m$-индексната функция на Митаг-Лефлер е H-функция на Фокс.

2.4. Интеграли и производни от произволен ред

Понятието "дробно смятане" (ДС) или "дробен анализ" се използва като разширение на "смятане" ("анализ"), когато редът на диференциране и интегриране може да бъде произволно число (дробно, ирационално, комплексно), т. е. не задължително цяло. Подробности за неговата теория и приложение могат да се намерят например в *енциклопедията на ДС* "S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev: Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Gordon and Breach, N. York - London (1993)" и също в неотдавна публикуваните "D. Valério, J.T. Machado, V. Kiryakova: Some pioneers of the applications of Fractional calculus (Historical survey), Fract. Calc. Appl. Anal., **17**, No 2, pp. 552–578, 2014; DOI: 10.2478/s13540-014-0185-1" и "I. Podlubny: What Euler could further write, or the unnoticed "big bang" of the fractional calculus, Fract. Calc. Appl. Anal., **16**, No 2, pp. 501–506, 2013; DOI:10.2478/s13540-013-0031-x". Стратегията и идеологията за по-нататъшното развитие може да се видят в "J. T. Machado, F. Mainardi, V. Kiryakova: Fractional calculus: quo vadimus? (Where are we going?) (Contributions to Round Table Discussion held at ICFDA 2014), pp. 495-526,

18, No 2, 2015; DOI: 10.1515/fca-2015–0031" и "J.A.T. Machado, F. Mainardi, V. Kiryakova, T. Atanacković: Fractional calculus: d'où venons-nous? Que sommes-nous? Où allons-nous? (Contributions to Round Table Discussion held at ICFDA 2016), Fract. Calc. Appl. Anal., **15**, No 5, 1074–1104, 2016; DOI: 10.1515/fca-2016-0059".

Най-популярната дефиниция за интегриране от ред $\lambda \in \mathbb{C}$ $(Re(\lambda) > 0)$, е за *дробния интеграл на Риман–Лиувил*

$$R^{\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z (z-t)^{\lambda-1} f(t) dt = \frac{z^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} f(z\tau) d\tau \,. \qquad (2.3.1)$$

Тогава *дробната производна на Риман–Лиувил* от ред $\lambda \in \mathbb{C}$ $(Re(\lambda) > 0)$, се дефинира като композиция на производна от цял ред и интеграл от дробен ред от вида (2.3.1) именно:

$$D^{\lambda} f(z) := D^n \, R^{n-\lambda} f(z), \qquad (2.3.2)$$

където

$$n := [Re(\lambda)] + 1 > Re(\lambda), \; [Re(\lambda)] = \text{цялата част на } Re(\lambda).$$

Резултатите в това направление са свързани с дробно смятане в разглежданите класове от мултииндексни функции и са провокирани от една неотдавнашна статия на Бажлекова и Димовски, в която те забелязват, че n-тата производна на 2-параметричната функция на Митаг-Лефлер дава 3-параметрична функция на Митаг-Лефлер, известна в литературата още като функция на Прабхакар. Естествен се оказва въпросът дали подобни релации съществуват за други видове функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип, а защо не и за производни и интеграли от произволен (не обезателно цял) ред.

Търсейки аналогията се оказва, че n-тите производни на функциите на Бесел-Мейтланд (с 2 индекса) се изразяват с обобщените функции на Бесел-Мейтланд с 3 индекса. След това се пресмятат някои специални случаи на дробните производни и интеграли на Риман-Лиувил от функциите на Бесел–Мейтланд и се доказват интересни зависимости. Това е направено в статията [25].

По-нататък вниманието ни се насочва към мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (резултатите се съдържат в [24]). Оказва се, че n-тите производни на $2m$-параметричните мултииндексни функциии на Митаг-Лефлер се изразяват чрез $3m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер. Изследванията продължават с някои специални случаи на интеграли на Риман-Лиувил и Ердей-Кобер от дробен ред от функциите на Митаг-Лефлер и се доказват интересни зависимости. Доказано е също, че аналогични зависимости свързват $3m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер с интегралите и производните от дробен ред на $2m$-индексните функции на Митаг-Лефлер. И накрая е показано, че многократни оператори на Ердей-Кобер за дробно интегриране, като оператори на обобщеното дробно смятане, свързват $2m$- и $3m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер.

От друга страна в публикацията [11] са изложени зависимости между $3m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер и интеграли и производни от дробен ред (а също и производни от по-висок цял ред) на $3m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер, умножени с подходяща степенна функция.

Получените релации в [11] и [24] се използват съществено в статията [26]. Освен това, в последната статия са направени модификации на част от тях (по-точно на частта от резултатите в [24], свързани с диференцирането). Тези резултати са изложени в Теореми 8 и 27 и Следствие 28. Като частни случаи са получени и съответните резултати за функцията на Прабхакар. По-нататък като се вземе предвид, че функциите от Беселов тип са представители на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер, се пресмятат n-тите производни на функциите от Беселов тип и се оказва, че обикновено те се изразяват чрез функциите от Беселов тип със същия или по-голям брой индекси, с точност до съответна степенна функция. Изчисляват се някои специални случаи на производни и интеграли на Риман-Лиувил от дробен ред на функциите от Бесселов тип и се доказват интересни зависимости.

2.5. Интегрални трансформации в обучението по математика във висшите училища

Други получени резултати са свързани с трансформацията на Лаплас, по точно с използването ѝ в процеса на обучение. Методът на използване на трансформацията на Лаплас, заедно със системата за компютърна алгебра (СКА) “Maple”, се прилага изключително успешно за решаване на клас интегрални уравнения от произволен ред, включително интегрални уравнения от дробен ред. В публикацията [22] това е илюстрирано с няколко подходящи примера. Комбинирането на двата мощни подхода позволява на студентите по-бързо, приятно и задълбочено да овладеят материала.

2.6. Интегрални трансформации

Една от най-популярните и често използувана е интегралната трансформация на Ханкел, чието ядро е, накратко казано, Беселова функция от първи род. На разпределението на нулите на последните са посветени многочислени изследвания и публикации, началото на които е поставено още от Пойа, след което това направление се превръща в традиционно за няколко поколения български математици. Съществени приноси са дадени от академиците Л. Чакалов, Н. Обрешков, Л. Илиев. Техните изследвания намират продължение в работите на Е. Божоров, К. Дочев, П. Русев, Д. Димитров и други.

Една група от резултатите в представените публикации е свързана с изследване нулите на крайни ханкелови трансформации. По точно, изучава се асимптотично поведение на нулите на един клас цели функции от еспоненциален вид, зададени с крайни ханкелови трансформации. Резултатите са аналогични на тези за крайни преобразования на Фурие. В публикацията [1] се изследва асимптотичното поведение на функциите $U(f;z) = \int_0^1 f(t) coszt$ и $V(f;z) = \int_0^1 f(t) sinzt$, зададени в нея съответно с равенствата (5.1.3) и (5.1.4). Оказва се, че при някои предположения за $f(t)$ нулите на целите функции (5.1.3) и (5.1.4) се приближават съответно до нулите на $sinz$ и $cosz$. Порядъкът на величините, които влияят на това приближение се дава с Лема 5.2.1 и Лема 5.2.2, а самата асимптотика на нулите на $U(f;z)$ и $V(f;z)$ се дава с Теореми 5.3.1, 5.3.2. и обобщенията им – Теореми 5.4.1 и 5.4.2. Тук се провеждат изследвания и за разпределението на нулите на функцията $A_\nu(f;z)$, зададена с (5.5.1), в която вместо $coszt$ фигурира Беселова функция от първи род (с точност до множител степен на z). Доказва се, че при предположения за функцията f от доста общ характер, цялата функция (5.5.1) има безбройно много реални нули и най-много краен брой нереални.

Накрая да споменем още един резултат, изложен в [1]. Той е свързан с решаването на една чисто практическа задача в която решението е намерено с прилагане на крайната трансформация на Ханкел. Направен е математически модел на нестационарния топлообмен в горивни камери на силови установки на безпилотни летателни апарати, даващ възможност да се прогнозира топлинното състояние и повишаване на тяхната надеждност.

Използувана е крайната интегрална трансформация на Ханкел за кух осесиметричен цилиндър с гранични условия от трети род по вътрешната и външна страна на горивната камера. В случая е използвана трансформацията на Ханкел при намиране на нестационарните температурни полета в камерата на силно дроселиран двигател с външно регенеративно охлаждане в момент на запуск.

3. Учебна литература и преподавателска дейност

3.1. Учебна литература (списък 16.2)

Следвайки номерацията в списък 16.2, накратко е описано съдържанието на учебниците и учебните помагала.

Учебното пособие [1] е предназначено за студентите от магистърския курс на специалност ХПТ на ТУ, изучаващи дисциплината "Избрани глави от висшата математика", която включва изложения учебен материал, но може да се използва и от други студенти, изучаващи този материал, както и от докторанти и научни работници. Предлаганото учебно пособие е посветено на интегралната трансформация на Лаплас, която се използва широко в теорията и практиката: при изследването на различни инженерно-технически задачи, при решаване на диференциални, интегрални и интегро-диференциални уравнения и системи, възникнали в процеса на изследване. Състои се от 11 параграфа. В него са изложени методи за решаване на основни типове примери и задачи. Всяка тема съдържа необходимия теоретичен материал, като на места са дадени кратки доказателства, подробно решени примери и задачи, както и достатъчен брой задачи за самостоятелна подготовка. В някои от решенията е използвана и СКА "Maple". Подробно изложените решения илюстрират изучавания материал, а използването на компютърните технологии помага на студентите за по-лесното му усвояване и осмисляне на математическите факти.

Учебникът [2] е съобразен с програмата (лекции и семинарни занятия) за обучение на студентите от факултета по приложна математика и информатика в Техническия университет София. Той може да се използва и от студентите в други университети. Учебникът се състои от две глави – Комплексни числа и Функция на комплексна променлива. В края е дадена кратка справка за живота и математическия принос на редица видни учени, имената на които се срещат в тази книга. След всеки параграф са предложени достатъчен брой задачи за самостоятелна работа на студентите. Преди това са решени някои основни типове задачи. Има и указания за решаването на по-трудните задачи.

Учебното помагало [3] е предназначено за студентите от специалност "Приложна математика и информатика", втори семестър. То може да се използва от всеки, който желае да обогати знанията си в областта на математиката и приложението ѝ във физиката и инженерните науки. "Maple", наред с "Mathematica", е един от най-популярните представители на така наречените системи за компютърна алгебра (CAS - computer algebra system). Това, което ги характеризира, е интегрирането в едно на възможности като удобен потребителски интерфейс, символни преобразувания, език за програмиране и интерпретатор за него, изчисления с произволна точност и богати 2D и 3D графични средства. Пособието започва с въведение в СКА "Maple". Освен това то съдържа необходимия теоретичен материал и достатъчно количество задачи по изучаваните теми. Предложените решения са както по класическия метод, така и с използването на "Maple". В [3] се съдържат и достатъчен брой задачи за самостоятелна работа на студентите.

Книгата [4] е учебник, предназначен за студентите от Факултета по приложна математика и информатика (ФПМИ), ОКС "бакалавър". Той обхваща материала от дисциплината "Математически анализ 2", която се изучава от специалност "Приложна математика и информатика" през втория семестър на обучението. Може да се използва и от студентите на всички останали факултети на ТУ – София, както и от други студенти, които изучават този материал, а също така от всеки, който желае да обогати знанията си в областта на математиката и приложението ѝ във физиката и инженерните науки. В учебника са застъпени разделите "Диференциално и интегрално смятане за функции на две и повече променливи", "Двоен, троен, криволинеен и повърхнинен интеграл", както и техните приложения. Всяка тема включва необходимия теоретичен материал. Дадени са доказателства на голяма част от твърденията, но поради ограничения брой страници част от тях са пропуснати. Изложеният материал е подкрепен с много примери, които несъмнено способстват за по-пълното му и задълбочено усвояване и осмисляне на математическите факти. Материалът е онагледен с 2D и 3D графики, генерирани с използване на СКА "Maple". Всичко това е направено с цел да се постигне по-голяма достъпност и яснота на изложението.

3.2. Преподавателска дейност (Списъци 16.3, 16.4 и 16.8)

Различните форми на преподавателска дейност от изброените списъци са разгледани по-долу.

- **Защитили дипломанти (Списък 16.3)**

  3 защитили дипломанти, от които 1 в специалност "Приложна математика" и 2 в специалност "Приложна математика и информатика", в бакалавърските програми на ФПМИ.

- **Защитили докторанти (Списък 16.4)**

  Консултант на 1 защитил докторант на самостоятелна подготовка (приложена е и заповед за зачисляване към Списък 16.4).

- **Аудиторна заетост (Списък 16.8)**

  Лекции по: Математически анализ първа и втора част за студенти от спец. "Информатика и софтуерни науки";

  Лекции и упражнения по Математически анализ втора част за студенти от спец. "Приложна математика и информатика";

  Лекции и упражнения по Комплексен анализ за студенти от спец. "Приложна математика и информатика";

  Лекции и упражнения по всички основни математически дисциплини за студенти от инженерни специалности (бакалавърска програма) в ТУ–София;

  Лекции и упражнения по Избрани глави от висшата математика (Теория на полето и интегрални трансформации) за студенти от инженерни специалности (магистърска програма) в ТУ–София.

4. Забелязани цитирания

Пълният списък от публикации се състои от 2 монографии (едната от които издадена в международното издателство World Scientific Publishing), 2 автореферата, 61 статии, 4 учебника и учебни пособия. От публикуваните 61 статии 13 публикации са с IF (Q1- 3 бр., Q2 - 1 бр. , Q3 - 3 бр., Q4 - 6 бр.) и 11 публикации са със SJR., сумарен импакт фактор: IF = 12.656 & SJR = 1.811; 21 публикации в други индексирани списания; 4 публикации в рецензирани неиндексирани списания и 12 бр. в сборници на международни конференции.

От тези публикации 23 броя са цитирани от 148 източника, от които 120 международни или в чужбина (6 в монографии и 6 в книга), като 70 броя са в списания с импакт фактор, и 12 броя в списания с SJR; Сумарен импакт фактор на цитиранията: IF = 128,974 & SJR = 4,648.

H-индексът (индекс на Хирш) е както следва:
h=7 (съгл. Web of Science) & h=8 (съгл. Scopus)
h=12 (съгл. CoogleScholar & Harzing's Publish or Perish).

От приложените за участие в конкурса 26 научни публикации са забелязани 69 цитирания, както следва: Брой цитирани публикации: 13; Брой цитиращи източници: 69; От тях: 3 цитирания в монографии, 1 в книга; 37 цитирания в списания с импакт фактор; 8 броя в списания със SJR; 10 броя в списания, индексирани в WoS / Scopus (без IF /SJR); 4 броя в списания, индексирани в Zentralblatt и IEEE Xplore. Сумарен импакт фактор на цитиранията: IF = 72,801 & SJR = 4,366. Списъците са приложени.

5. Апробация на резултатите

Получените резултати са докладвани на множество международни конференции и семинари у нас и в чужбина. Списъкът им 16.6 е отделно приложен.

6. Научни проекти

Статиите [2, 3] са изготвени в рамките на научната програма по научен проект към ИМИ "Трансформационни методи, специални функции, операционни смятания и приложения", а статиите [4]–[13] – по научен проект към МОН (Д ИД 02 / 25/ 2009 "Интегрално трансформационни методи, специални функции и приложения"). Останалите публикации са по двустранните научни договори "Mathematical modelling by means of integral transform methods, partial differential equations, special and generalized functions" и "Analytical and numerical methods for differential and integral equations and mathematical models of arbitrary (fractional or high integer) order" между БАН и САНИ и "Анализ, геометрия и топология" между БАН и МАНИ. (приложен е списък на проектите).

28. 08. 2019 г. Изготвил: ....
гр. София (доц. д.н. Й. Панева-Коновска)

Библиография

[1] J. Paneva-Konovska, *After the Invitation to Bessel Functions*, Softtraid (2019), Sofia.

[2] J. Paneva-Konovska,Tauberian theorem of Littlewood type for series in Bessel functions of first kind, *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.* **62**, No 2, 2009, 161–166.

[3] J. Paneva-Konovska, Tauberian theorem of Littlewood type for series in Bessel–Maitland functions, *Mathematica Macedonica* **6**, 2008, 55–60.

[4] J. Paneva-Konovska, Convergence of series in Mittag-Leffler functions, *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.* **63**, No 6, 2010, 815–822.

[5] J. Paneva-Konovska, Series in Mittag-Leffler functions: inequalities and convergent theorems, *Fractional Calculus & Applied Analysis* **13**, No 4, 2010, 403–414.

[6] J. Paneva-Konovska, Inequalities and asymptotic formulae related to generalizations of the Bessel Functions, AMEE 2010, *AIP Conference proceedings* **1293**, 2010, 157–164; doi:10.1063/1.3515580

[7] J. Paneva-Konovska, Convergence of series in Mittag-Leffler type functions, *AIP Conference Proceedings*, (AMiTaNS'10) **1301**, 2010, 636–643; doi:10.1063/1.3526665

[8] J. Paneva-Konovska, Series in some Mittag-Leffler type functions: Theorems for their convergence in complex domain, *Proc. of International Symposium "Geometric Function Theory and Applications, Sofia'10"*, IMI, BAS, 2010, 223–228.

[9] J. Paneva-Konovska, Convergence of series in some multi-index Mittag-Leffler functions, *Proceedings of FDA'10* (The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications, Badajoz, Spain, October

18-20, 2010, Proc. IFAC: FDA'10 (Badajoz, Spain)), Article no. FDA10-147, 2010, 1–4 (Eds: I. Podlubny, B. M. Vinagre Jara, YQ. Chen, V. Feliu Batlle, I. Tejado Balsera).

[10] J. Paneva-Konovska, Inequalities and asymptotic formulae for the three parametric Mittag-Leffler functions, *Mathematica Balkanica, New Series* **26**, Fasc. 1-2, 2012, 203–210.

[11] J. Paneva-Konovska, Three-multi-index Mittag-Leffler functions, series and convergence theorems, The Fifth Symposium on Fractional Differentiation and Its Applications May 14-17, 2012, Hohai University, Nanjing, China, *Proceedings of FDA'12*, 2012, Paper No: #284, 1–7 (Editors: Wen Chen, HongGuang Sun and Dumitru Baleanu).

[12] J. Paneva-Konovska, Fatou type theorems for series in Mittag-Leffler functions, AMEE 2012, *AIP Conf. proceedings* **1497**, 2012, 318–325; doi: 10.1063/1.4766800

[13] J. Paneva-Konovska, Comparison between the convergence of power and Mittag-Leffler series, 7th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM, December 19-20, 2012, Sofia, *Proceedings of BGSIAM'12*, 2012, 111–115, Sofia, Bulgaria.

[14] J. Paneva-Konovska, Comparison between the convergence of power and Bessel series, AMEE 2013, *AIP Conf. proceedings*, **1570**, 2013, 383–392; doi: 10.1063/1.4854780.

[15] J. Paneva-Konovska, Comparison between the convergence of power and generalized Mittag-Leffler series, Intern. Conf. "Complex analysis and applications' 2013 31. Oct.- 02. Nov. 2013, София, *Proceedings of CAA'13*, 166–173, София, Bulgaria.

[16] J. Paneva-Konovska, Fatou Theorems for Multi-index Bessel Series, *Amer. Inst. Physics Conf. Proc.* (AMEE 2014), **1631** (2014), 303 – 312; doi: 10.1063/1.4902491.

[17] J. Paneva-Konovska, Overconvergence of Bessel type series, *Amer. Inst. Physics Conf. Proc.* (AMEE 2015) **1690** (2015), 050004, 1 – 8; doi: 10.1063/1.4936734.

[18] J. Paneva-Konovska, On the convergence and overconvergence of Mittag-Leffler series, *Adv Math Sci Journal* **4**, no.2, 2015, 175–181.

[19] J. Paneva-Konovska, Periphery behaviour of series in Mittag-Leffler type functions, I. *Intern. J. Appl. Math.* **29**, No. 1, 2016, 69–78; doi: 10.12732/ijam.v29i1.6.

[20] J. Paneva-Konovska, Periphery behaviour of series in Mittag-Leffler type functions, II. *Intern. J. Appl. Math.*, 29, No. 2, 2016, 175–186; doi: 10.12732/ijam.v29i2.2

[21] J. Paneva-Konovska, Series in 3-parameter Mittag-Leffler functions - various convergence theorems, International Conference on Fractional Differentiation and its Applications, Novi Sad, Serbia, July 18 - 20, 2016, *Proceedings of ICFDA'16*, Novi Sad, Serbia, 2016, 786–789.

[22] J. Paneva-Konovska, Y. Nikolova, Laplace transform approach for solving integral equations using Computer Algebra System, AMEE 2016, *AIP Conf. proceedings* **1789**, 050008 (2016) - 9 стр.; doi: 10.1063/1.4968492.

[23] J. Paneva-Konovska, On a family of Bessel type functions: Estimations, series, overconvergence, AMEE 2017, *AIP Conf. Proceedings* **1910**, 2017, 050002 1–8; doi:10.1063/1.5013984.

[24] J. Paneva-Konovska, Differential and integral relations in the class of multi-index Mittag-Leffler functions, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **21**, No1, 2018, 254–265; DOI:10.1515/fca-2018-0016.

[25] J. Paneva-Konovska, Bessel type functions: Relations with integrals and derivatives of arbitrary orders, AMEE 2018, *AIP Conf. Proceedings* **2048**, 050015, 050015-1 – 050015-6, 2018; doi:10.1063/1.5082114

[26] J. Paneva-Konovska, A survey on Bessel type functions as multi-index Mittag-Leffler functions: Differential and integral relations, *International Journal of Applied Mathematics* **32**, No 3, 2019, 357–380; doi: 10.12732/ijam.v32i3.1.

Учебници и учебни пособия

[1] Й. Панева-Коновска. *Трансформация на Лаплас в примери и задачи*. Издателство и печат –Технически университет – София, София, 2012. ISBN: 978-954-438-992-5

[2] Л. Гърневска, Р. Петрова, Й. Панева-Коновска. *Комплексни числа. Функция на комплексна променлива*. Издателство "Авангард Прима", София, 2012. ISBN: 978-619-160-057-1

[3] Й. Панева-Коновска, Т. Станчева. *Ръководство по Математически анализ 2 с помощта на MAPLE*, Издателство и печат – Технически университет – София. София, 2014. ISBN: 978-619-167-099-4

[4] Й. Панева-Коновска. *Математически анализ 2*, Издателство и печат – Технически университет – София, София, 2018. ISBN: 978-619-167-298-1